

つぶれやすい管の中を流れる定常流の不安定性

川崎医科大学 物理学教室

近 藤 芳 朗

(昭和58年9月27日受理)

Instability of Steady Flow through Collapsible Tube

Yoshiro KONDO

Department of Physics, Kawasaki Medical School

Kurashiki 701-01, Japan

(Received on Sept. 27, 1983)

概 要

つぶれやすい管の中の流れを解析するために1次元理論を展開した。基礎となる方程式は流体に対する連続の式、運動方程式およびつぶれやすい管に対する Tube Law である。流体は非圧縮性でかつ粘性をもつものとし、管は非常に薄くその断面積は経壁圧だけで決まると仮定した。定常解については解析的に議論することができ、その結果、“管と流体の結合した線形波の局所的な位相速度に流体の速度が等しくなる場合には定常解が存在しえない”ということがわかった。特別な Tube Law に対して、管の断面積を場所の関数として解析的に求めた。この場合の圧-流量特性は Vascular Waterfall Model のそれと同じになり、さらに下流域での境界条件を考慮すると Starling Resistor Model の圧-流量特性と定性的に同じものになった。

Abstract

The one-dimensional theory of flow of an inviscid, incompressible fluid through a collapsible tube, is developed. Fundamental equations which govern the flow, are the equation of continuity, the equation of motion for the fluid, and the tube law for the collapsible tube. The wall thickness of the tube is assumed to be sufficiently thin so that the magnitude of the cross section of the tube can be determined by only the transmural pressure. In the case of that the fluid speed coincides with the local wave velocity at some point of the tube, it is found that any steady state flow can not exist. For the particular tube law, the magnitude of the cross section is obtained as a function of a position of the tube. As a result of this, we obtain a pressure-flow relation which characterizes the flow of the vascular waterfall model. Furthermore, adding a boundary condition in down stream to this relation, it leads to that of Starling resistor model.

§1. 序

管は生体内のものと人工的なものとを問わず、その主たる目的は物質を輸送するというものである。したがって、何らかの原因によって物質輸送の能力が低下するときには重大な支障を

きたすことになる。それが特に生体内の管である場合にはなおさらである。

生体内の代表的な管には血管、気道および尿道などがある。これらはいずれも、水道管などのかたい管とは異なり、一般にはやわらかく、つぶれやすいのが特徴である。管がつぶれやすいということは、管が管内を流れる流体の運動の影響を受けやすいということであって、このことは管と流体とが互いに影響を及ぼしあいながら新しい形態の流れが出現する可能性を示唆している。その中には、当然、生体にとって好ましくない流れも含まれているであろう。

つぶれやすい管の中の流れに関する実験的な研究は Starling に始まり、現在まで継続して行なわれている。〔1-11〕つぶれやすい管を用いた流れの実験装置は Starling Resistor Model と呼ばれていて様々な角度から流れの特性が調べられている。一方、理論的な立場からも、つぶれやすい管の弾性力学的な研究や〔12〕、つぶれやすい管の中の流れに関する流体力学的な研究〔13-18〕などが行なわれている。

生体内における管でつぶれの観測されたもの、あるいはつぶれが生じていると考えられているものには大小さまざまな血管をはじめ、気道および尿道などがある。血管のつぶれの実例については、通常に観測される場合のつぶれの他、病理生理学的なつぶれ、外部干渉によるつぶれの例なども報告されている。〔19〕

Permutt ら〔20〕は肺の微小循環のつぶれやすい血管における血流の様子を記述するために一つの現象論的なモデルを提出した。このモデルは管のつぶれによる流れの特徴をよくとらえたもので、その圧-流量特性は“血管が組織圧によって部分的につぶれているときには血流量は下流圧に依存しない”と仮定されている。このような流れの特徴はあたかも滝の流れが滝の高さに関係しないのと同じであって、それ故 Permutt らの提出したモデルは Vascular Waterfall Model と呼ばれている。

Vascular Waterfall Model の流れ特性は現象論的な考察から導入されたもので厳密には仮定であって、その流体力学的な基礎づけはまだない。それにもかかわらず、Vascular Waterfall Model が多くの研究者たちによって、生体内の大小さまざまな血管の流れ特性を説明するために用いられてきたのは〔20-28〕、つぶれやすい管の中の流れの本質的な特徴をとらえているからである。

この論文の目的はつぶれやすい管の中の流れを1次元理論によって解析し、それによって Starling Resistor Model の流れ特性を説明すること、および Starling Resistor Model と Vascular Waterfall Model との関連を明らかにすること、それによって Vascular Waterfall Model の流体力学的基礎づけを与えることである。

§2. 1 次元理論

つぶれやすい管の中の流れを研究するために、通常の1次元モデル〔16〕を採用する。すなわち、流体の流速、圧力は流れに対して垂直な断面上では一定であるとする。流体は x 軸の正方向に流れているものとし、座標 x での流速を u 、圧力を P 、流量を Q および管の断面積を A

とする。また、流体は非圧縮性流体であるとし、密度はどこでも一定で ρ であるとする。

基礎になる方程式は

連続の式

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{4l}{A\rho} \tau_w = 0 \quad (2)$$

Tube Law

$$P - P_e = p_t(A) \quad (3)$$

である。ここで、 l は管の周囲の長さを、 τ_w は管壁での剪断応力の大きさを、そして P_e は管の外圧を表す。また、以上の諸式を導くにあたって、管は水平に置かれていて重力の効果は無視し、管の厚さは非常に薄くてその断面積は経壁圧だけで決まるとした。

さらに当然の式

$$Q = uA \quad (4)$$

を付け加えると方程式の組としては完全になる。普通、剪断応力 τ_w に対しては流速 u に比例すると仮定されるが本研究でも

$$\tau_w = \alpha \frac{\eta}{4l} u \quad (5)$$

と仮定する。ここに、 η は流体の粘性率を、 α は比例定数を表す。ポアズイユ流の場合には、管の内径を a とすると $\tau_w = 4\eta u/a$ である。

§3. 定常解とその安定性

定常状態での解を求めるために方程式(1), (2)において、時間に関する微係数を0とおく。このとき、 Q = 一定となり u は A に反比例することがわかる。圧力 P も Tube Law から A だけに依存するので、結局 u , P は A の関数となる。以上より、前節の基礎方程式群は A を x の関数として求めるためのものとなる。特に

$$\frac{\partial P}{\partial x} = p_t'(A) \frac{dA}{dx} \quad (6)$$

に注意すると最終的に

$$\frac{dx}{dA} = \frac{\rho A}{\alpha \eta Q} (u^2 - c^2) \quad (7)$$

を得る。ここに、 c は壁と流体の結合した線形波の局所的な位相速度であって

$$c^2 = A p_t'(A) / \rho \quad (8)$$

で与えられる。方程式(7)を A で積分して

$$x = x_0 + \frac{\rho Q}{\alpha \eta} \ln(A/A_0) - \frac{1}{\alpha \eta Q} \int_{A_0}^A A^2 p_t'(A) dA \quad (9)$$

を得る。Tube Law p_t の A 依存性が具体的に定まると、上式は A を x の関数として与える。その結果、ある特定の A に対して x が唯ひとつ定まるとは明らかであるが、その逆は必ずしも成立しない。

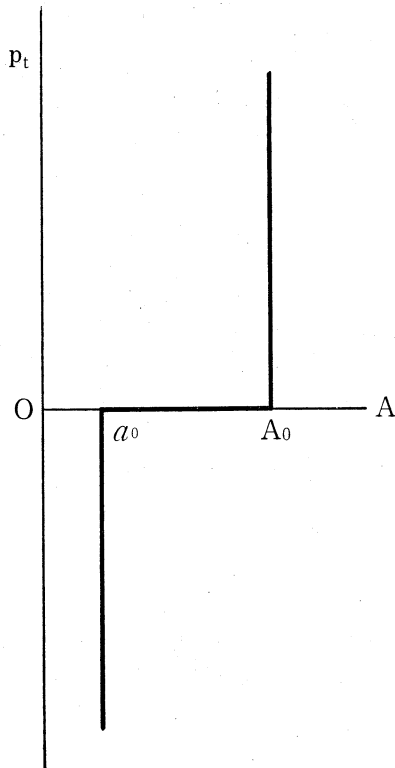
以上より、流体の速度 u と、壁と流体の結合した線形波の局所的な位相速度 c とがどこかで一致する場合にはこの場所の近傍で A は x の多価関数となることがわかる。したがって、このような場合、定常解は存在しないことになる。この場合は非定常のすなわち振動的な解が存在するものと思われる。この非定常の振動的な解は自励振動であって、§5.でも議論する。こうして、 $u=c$ の成立する場合は定常流に不安定性を生ずることがわかったが、それでは $u=c$ はどんな流量のとき、どこで生ずるかということは具体的な Tube Law の形に関係するので次節で具体例について述べることにする。

§4. 圧一流量 特性

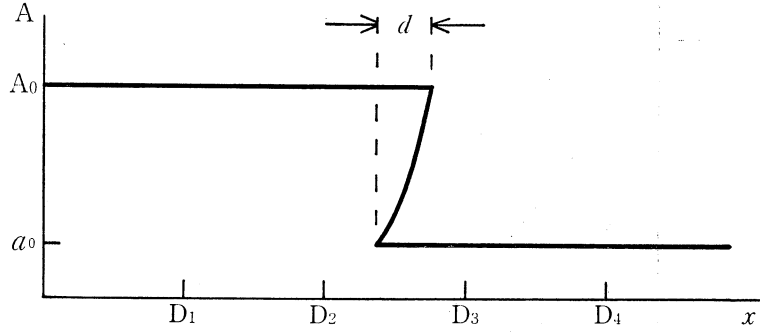
管の断面積 A を場所 x の関数として具体的に求めるために、非常に単純な Tube Law をもつ管について考える。それは第1図のような Tube Law をもつものであって、この Tube Law によって表わされる管は次のような性質をもっている。すなわち、この管は $P > P_e$ では $A = A_0$ の剛管となり、 $P = P_e$ では $a_0 < A < A_0$ でコンプライアンス $((dp_t/dA)^{-1})$ に比例)が $+\infty$ の完全にやわらかい管となり、そして $P < P_e$ では $A = a_0$ の剛管となる。

このような Tube Law をもつ管内の流れは、流量 Q の大きさにかかわらず、つねにどこかで $u=c$ となって不安定性を生じ、自励振動が発生する。 $u=c$ の成立する近傍での管の断面積の様子は前節の結果に第1図の Tube Law を考慮することによって得られる。それが第2図である。この図で A が x の多価関数となっている部分で強い自励振動が出現する。以上は無限に長い管の場合であって、有限の長さの管の場合には管の部分でつねに $u=c$ となるとは限らない。有限の長さの管の場合に管の部分で $u=c$ とならなければ流れは定常で安定である。

以上の Tube Law をもつ系の流れ特性を求めるために第2図において各区間 D_1D_2 , D_2D_3 , D_3D_4 での圧力差と流量の関係を求めてみる。区間 D_2D_3 の場合は自励振動が発生し定常流の解は使えないが、時間平均された圧力と流量については定常流の結果がそのまま使用できると仮定する。いずれの区



第 1 図



第 2 図

間においても上流側の圧力を P_1 ，下流側の圧力を P_2 とし，区間の長さはいずれも L ，強く自励振動をしている部分の長さを d とする。結果は次のとおりである。

(i) 区間 D_1D_2 (領域Ⅰ)

$$P_1 > P_2 > P_e \text{ のとき } Q = (P_1 - P_2)/R_0 \quad (10)$$

(ii) 区間 D_2D_3 (領域Ⅱ)

$$P_1 > P_e > P_2 \text{ のとき } Q = \frac{P_1 - P_e}{R_0'} + \frac{P_e - P_2}{r_0'} \quad (11)$$

(iii) 区間 D_3D_4 (領域Ⅲ)

$$P_e > P_1 > P_2 \text{ のとき } Q = (P_1 - P_2)/r_0 \quad (12)$$

ここで， $R_0, R_0'; r_0, r_0'$ は断面積が A_0 および a_0 であるときの流動抵抗であって

$$R_0 = \frac{\alpha\eta L}{A_0^2}, \quad R_0' = \frac{\alpha\eta}{A_0^2}(L+d)$$

$$r_0 = \frac{\alpha\eta L}{a_0^2}, \quad r_0' = \frac{\alpha\eta}{a_0^2}(L+d)$$

で与えられる。一般に $r_0 \gg R_0 (\because A_0 > a_0)$ であるから (ii) の関係式は近似的に

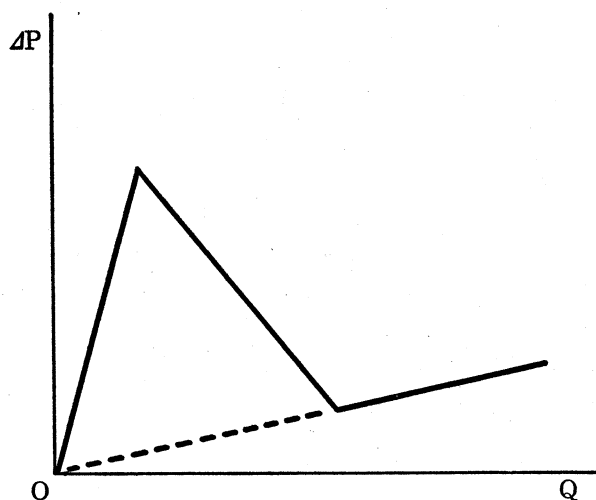
$$Q \cong (P_1 - P_e)/R_0' \quad (13)$$

となって，Vascular Waterfall Model のそれに一致する。すなわち，流量は上流圧と外圧の差だけに関係し，下流圧には関係しない。

次に Starling Resistor Model の流れ特性と比較するために下流域での境界条件を次のように設定する。すなわち

$$Q = P_2/R_2 \quad (14)$$

である。この条件は下流側の抵抗は R_2 で一定とみなし，圧力 P_1, P_2, P_e などはいずれも下流端の圧力から測るべきであることを示している。方程式群 (10), (11), (12), (14) を総合すると圧差 $\Delta P = P_1 - P_2$ と Q との流れ特性は第 3 図のようになる。この図では簡単のため $L \gg d$ であるとして， L に対して d を無視した。この圧-流量特性は Starling Resistor Model のそれによく似ている。Starling Resistor Model の実験結果では中間の領域Ⅱの部分は，高レイノルズ



第 3 図

数の流れに対しては自励振動が発生し〔6, 7, 9-11〕, 低レイノルズ数 ($R_0 \leq 1$) の流れに対しては自励振動は発生しない〔19〕。単純な Tube Law をもつ本研究の場合は高レイノルズ数の結果に対応するものと考えられる。

§ 5. 結 語

単純な Tube Law をもつ非現実的な管に対して 1 次元理論を適用すると, Vascular Waterfall Model の流れ特性を導くことができた。ただし, 本研究の結果は自励振動が発生するのに対し Vascular Waterfall Model では自励振動はない。この結果と下流域での境界条件とを結合すると ΔP - Q 特性は Starling Resistor Model のそれと定性的に類似のものが得られた。

単純な Tube Law をもち無限に長い管の場合には, 流量 Q の大きさにかかわらず定常流は不安定であって, 非定常の流れの解析解を求めることが困難なのでこの場合の流れがどのようなものであるかはわからないが, それが自励振動であることはほぼまちがいないものと思われる。というのは振動解でない非定常の解は不規則なもので乱流に相当すると考えられるが, この流れは流量の小さい流れについてはあてはまらないので, 本研究の非定常解は振動流となり, そしてこの振動的な入力の結果でもないからである。

より現実に近い一般的な Tube Law をもつ管に対する流れの詳細な研究は現在進行中であるが, 本研究の結果からも次のことは推論できる。

管のコンプライアンスが有限の場合には流量 Q がある臨界の流量 Q_c より小さいときには無限に長い管の場合でも $u=c$ は成立しない。この場合, 管の全領域において定常流が存在する。 $Q > Q_c$ の場合には管が無限に長いときどこかで $u=c$ になりうるが, 管が有限であればこの場合でも定常流は存在しうる。 $Q \geq Q_c$ のいずれの場合も第 3 図と同じ流れ特性をうるが中間

の領域Ⅱでは定常流 ($Q < Q_c$) の場合と自励振動が発生する場合 ($Q > Q_c$) とが起こってくる。 $Q < Q_c$ の自励振動の発生しない場合の流れ特性は Vascular Waterfall Model のそれと完全に一致する。詳細は発表の予定である。

参 考 文 献

- [1] Knowlton, F. P. and Starling, E. H.: J Physiol, **44** (1912) 206-219
- [2] Holt, J. p.: Am J Physiol, **134** (1941) 292-299
- [3] Brecher, G. A.: Am J Physiol, **169** (1952) 423-433
- [4] Rodbard, S.: Circulation, **11** (1955) 280-287
- [5] Doppman, J., Robinson, R. M., Rockoff, S. D., Vasko JS, Shapiro, R. and Morrow, A. G.: Invest Radiol, **1** (1966) 37-52
- [6] Conrad, W. A.: IEEE Trans Biomed Eng, **16** (1969) 284-295
- [7] Katz, A., Chen, Y. and Moreno, A.: Biophys J, **9** (1969) 1261-1279
- [8] Moreno, A., Katz, A. and Gold, L.: IEEE Trans Biomed Eng, **16** (1969) 308-324
- [9] 青野, 大場: 機講論, **No. 794-5** (1979) 24
- [10] 青野, 大場, 山田: 機講論, **No. 884-3** (1980) 37
- [11] 大場他: 医用電子と生体工学**18**巻 (1980) 368
- [12] Kresh, E. and Noordergraaf, A.: Biophys J, **12** (1972) 274-294
- [13] Griffiths, D. J.: Med Biol Engng, **9** (1971) 581-588; ibid **9** (1971) 589-596
- [14] Griffiths, D. J.: Med Biol Engng, **9** (1971) 597-602
- [15] Griffiths, D. J.: Med Biol Engng, **13** (1975) 785-802
- [16] Shapiro, A. H.: J. Biomed Eng Trans ASME (1977) 126-147
- [17] Kamm, R. D. and Shapiro, A. H.: J Fluid Mech., **95** (1979) 1-78
- [18] Grotberg, J. B. and Davis, S. H.: J. Biomechanics, **13** (1980) 219-230
- [19] Lyon, C. K., Scott J. B. and Wang, C. Y.: Circ Res, **47** (1980) 68-73
- [20] Permutt, S., Bromberger-Barnea, B., Bane, H.: Med Toorac, **19** (1962) 239-260
- [21] Downey, J. M., Kirk, E.: Circ Res, **36** (1975) 753-760
- [22] Green, J. G.: Am J Physiol, **229** (1975) 761-769
- [23] Mitzner, W.: Am J Physiol, **227** (1974) 513-519
- [24] Nakhjavan, F. K., Palmer, W. H., McGregor, M.: Circulation, **33** (1966) 8-18
- [25] Duomarco, J. L., Rimini, R.: Am J Physiol, **178** (1954) 215-219
- [26] Lopez-Muniz, R., Stephens, N., Bromberger-Barnea B, Permutt, S., Riley, S.: J Appl Physiol, **24** (1968) 625-635
- [27] Bellamy, R. F.: Circ. Res, **43** (1978) 92-101
- [28] 中井, 友永, 小笠原, 辻岡, 梶谷: 時系列的生体情報の計測・処理