スタイン—永谷の貨幣的成長モデルに関する一考察

——短期動学モデルの安定性について——

川崎医科大学経済学教室

山　崎　嘉　之

(昭和54年10月15日受理)

A Study in the Stein-Nagatani's Monetary Growth Model

——On the Stability of a short-run Dynamic Model——

Yoshiyuki YAMASAKI

Department of Economics, Kawasaki Medical School

Kurashiki 701-01, *Japan*

(*Received on Oct.* 15, 1979)

概　　要

スタイン—永谷は，いわゆる「ケインズ—ヴィクセル」的な貨幣的成長モデルを提示しているが，彼等のモデルの本質的な特徴はつぎの４つの仮定にあると考えられる。第１に，貯蓄関数とは独立した投資関数が存在することである。第２に，生産物市場は均斉成長状態(steady state of economic growth) においてもつねに需給不均衡であるということである。このことに関連して２つの方程式が導入される。１つは財に対する超過需要（または超過供給）が存在するならば，一般価格水準は変動するというワルラス派の動学仮説（dynamic Walrasian assumption）であり，他方は不均衡状態において投資および貯蓄関数とは別個に現実の資本蓄積率を決定する方程式である。第３に債券市場については，つねに需給均衡の状態が仮定されている。したがってワルラス法則より労働市場の均衡にくわえて債券市場の均衡を仮定した場合には，財に対するフロー超過需要は実質貨幣残高フロー超過供給に等しいという関係がえられる。第４に，期待インフレ率の形成については期待は常に実現されるという静学的価格期待が仮定されている。

以上４つの特徴的な仮定から構成されたモデルに基づいて，彼等は比較静学分析として，たとえば資本単位当り実質貨幣残高の変化に対する均衡（短期）インフレ率の変化の方向について検討しているが，その変化の方向は不明であるという結果をえている。しかしこのような場合，問題はモデルの動学的安定条件を適用することによってその変化の方向を確定することができないかどうかということである。

本稿の目的は，スタイン—永谷等によってとりあげられた動学モデルよりもより一般的な動学モデルを構成し，これに基づいてスタイン—永谷•モデルの安定条件を導出することである。これによって彼等の比較静学分析結果を明確にすることである。まず，債券市場の不均衡を考慮し，第3の仮定に代えて Hadjimichalakis 等によって定式化された利子率の時間的変化を示す動学的貸付資金説(dynamic loanable funds theory)を導入する。また価格期待の形成については第4の仮定の代わりに，Sidrauski, Hadjimichalakis 等によって使用された適応期待仮説（adaptive expectation hypothesis）を採用する。これら２つの動学方程式に加えて資本単位当り実質貨幣残高の時間的変化を示す動学方程式が存在する。以上の３つの動学方程式に一般価格水準の変動を表わすワルラス派の動学仮説を代入することによって短期動学モデルが構成される。以上の短期動学モデルに基づいて，われわれはスタイン—永谷•モデルの安定条件を Routh-Hurwitz の判定条件によって導出

した。その結果，スタイン―永谷の短期モデルにおいて不明であった比較静学分析結果を明確にすることができた。

Abstract

In their article, J.L. Stein and K. Nagatani develop a "Keynes-Wicksell" monetary growth model which has four features. First, investment demand function is specified independently of savings function. Secondly, it is assumed that the good market be continuously in disequilibrium. In this context, there is a dynamic Walrasian assumption that the proportionate rate of change of the price level is positively related to the excess demand for good per unit of capital. Thirdly, it is assumed that the bond market be continuously in equilibrium. Lastly, there is stationary expectation assumption that actually realized rate of inflation always equal to the expected rate of inflation.

In this model, they examine the comparative-static properties of the model. For example, they analyze effects of change in the per unit of capital real balances on the equilibrium (short-run) rate of inflation, but they conclude that the direction of the change is *indeterminate*. In this case, however, there is a problem whether we can have definite answer to the direction of the change by making use of the stability condition of dynamic models.

The purpose of this paper is to re-examine their comparative static questions by a more general short-run dynamic model than Hadjimichalakis and Stein-Nagatani considered. This more general dynamic model is characterized by disequilibrium in the bond market. In this model, in order to explain the dynamic behavior of nominal interest rate we adopted a dynamic loanable funds theory formulated by Hadjimichalakis and Johnson. As to the dynamic behavior of expectation, we introduced adaptive expectation hypothesis used by Sidrauski and Hadjimichalakis in their monetary growth models. This general model consisted of these dynamic equations includes the Stein-Nagatani Model as a special case.

In this general short-run dynamic model, we derived Stein-Nagatani model's stability condition from Routh-Hurwitz criterion. We get a definite conclusion that an increase in the real balances per unit of capital *increases* equilibrium rate of inflation as well in a more general short-run dynamic model we considered.

はしがき

スタイン―永谷は，彼等の論文〔9〕においていわゆる「ケインズ―ヴィクセル」的な貨幣的成長モデルを提示しているが，彼等はスタインの初期の論文〔6〕で行なわれた数学的手法を用いてモデルの均斉解（steady-state solution）を導出すると共にその比較静学分析を行なっている。彼等はその比較静学として，たとえば資本単位当り実質貨幣残高の変化に対する均衡インフレ率の変化の方向を検討しているが，その変化の方向については不明であるという結果をえている。しかしこのような場合，モデルの動学的安定条件を適用することによってその変化の方向が確定できないかどうかが問題になる。このような問題はサムエルソンのいわゆる対応の原理（Correspondence Principle）を適用することによって解明できることはよく知られ

ている。

以上の観点より彼等の比較静学分析の問題点を解明した論文としては，Hadjimichalakis〔2〕，およびスタイン—永谷〔9〕があげられるしかしながら，スタイン—永谷・モデルにおいて利子率が重要な変数として考慮されているにもかかわらず，彼等のいずれの動学モデルにおいても利子率の時間的変化を表わす動学方程式は含まれていない。また Hadjimichalakis はその後の論文〔3〕において，貸付資金説を動学的に定式化することにより「ケインズ—ヴィクセル」的な動学モデルを構成しているが，しかし彼は実際の分析ではスタイン—永谷の仮定にしたがって利子率に関する動学方程式を除去して安定条件を導出している。

本稿の目的は Hadjimichalakis によって定式化されたこの動学方程式を導入することにより，スタイン—永谷の短期動学モデルを修正し，それに基づいて，短期動学モデルの安定条件を導出することである。そうすることにより彼等の比較静学分析の問題点を解明することができるものと思われる。

以下，第1節においてスタイン—永谷・モデルの要約を行なう。第2節においては彼等のモデルにおける均斉解の比較静学分析の問題点をとりあげ，この問題点を解明するためにスタイン—永谷・モデルを特別の場合として含む動学モデルを構成する。第3節では短期の観点から動学モデルが構成され，以上の動学モデルに基づいて，スタイン—永谷・モデルの動学的安定条件を導出する。

第1節　スタイン—永谷の貨幣的成長モデル[1)]

まずスタイン—永谷の貨幣的成長モデルについてみよう。まず，生産条件については，いわゆる新古典派の well-behaved な生産関数が仮定される。いま，産出量を Y，資本量を K，能率単位で測定された労働投入量を N とすると，生産関数は

$$Y=F(K,\ N)$$

である。この生産関数は K と N に関して1次同次であり，さらに各生産要素の限界生産力は正であるが，逓減するものとすれば，生産関数およびその性質はつぎのように示される。

(1)　$y=y(x)\ ;\ y'(x)>0,\ y''(x)<0$

ただし，$Y/K\equiv y$，$N/K\equiv x$ とする。

つぎに，完全競争における企業の利潤最大化の仮定のもとでは，資本の限界生産力 r についてつぎのような関係が成立する。

(2)　$r=r(x)=y(x)-xy'(x)$

また，労働供給量 N は完全雇用され，外生的要因により n の率で増加しているものとする。

つまり　$\dot{N}/N=n$

である。ここで $\dot{N}\equiv dN/dt$ とする。以下，(・)ドットのついた変数はその変数を時間 t で微分したものをあらわすものとする。

以上の諸仮定はトービン〔11〕，〔12〕，シドラウスキー〔5〕によって展開された新古典派の貨

幣的成長モデルの場合とまったく同一であるが，スタイン—永谷・モデルはつぎの4つの特徴をもっているものと考えられる[2]。

第1に，貯蓄関数とは別個の独立した投資関数が存在するということである。彼等は投資関数を(3)式のように示している。

$$(3)\quad \frac{I}{K}=n+r(x)+\pi^*-\rho=n+r(x)-(\rho-\pi^*)$$

すなわち望ましい資本集約度の成長率（$I/K-n$）が，資本の限界生産力 $r(x)$ と債券の実質利子率（$\rho-\pi^*$）との差に比例するものと考えるのである。ここで ρ は債券の名目利子率であり，π^* は期待インフレ率である。

これに対して，貯蓄関数については，実質貯蓄 S が，実質所得 Y，民間部門の実質純資産に依存するという通常の考えにしたがって，つぎのように示される。

$$S=S^*(Y,\ K+A)$$

ここで，A は民間部門の公共部門に対する実質純債権 (real net claim)であり[3]，これに実物資本 K を加えたものが民間部門の実質純資産と定義される。実質貯蓄は Y と（$K+A$）に関して1次同次関数と仮定すると

$$\frac{S}{K}=S\left(\frac{Y}{K},\ \frac{A}{K}\right)$$

となる。さらに $A/M/P\equiv\theta$，$M/PK\equiv V$ と定義すれば，A/K は θV で表わすことができる。ここで M は名目外部貨幣供給量である。したがって資本単位当り実質貯蓄は

$$(4)\quad \frac{S}{K}=S(y(x),\ \theta V)$$

で示される。ここで，$\partial S()/\partial x\equiv S_1y'(x)>0$，$\partial S()/\partial V\equiv S_2\theta<0$ と仮定される。

第2の特徴は，生産物市場については，均斉状態（steady state）において，つねに需給不均衡の状態が仮定されているということである。したがって，このことに関連して2つの方程式が導入される。1つは，財に対する超過需要（または超過供給）が存在するならば，一般価格水準は変動するというワルラス派の動学仮説であり，それはつぎのように示される。

$$(5)\quad \pi=\lambda\left[\frac{I}{K}-\frac{S}{K}\right]$$

ここで，π は一般価格水準の変動率をあらわし，一般価格水準をP，$\dot{P}\equiv dP/dt$ とすると，$\pi\equiv\dot{P}/P$ である。また，〔$I/K-S/K$〕は生産物に対する超過需要（または超過供給）であり，λ は生産物市場の正の調整速度を表わす。

もう一方の方程式は不均衡状態において現実の資本蓄積率 $\dot{K}/K$ を決定する方程式であり，それはつぎのように考えられている。

$$\frac{\dot{K}}{K}=a\left(\frac{I}{K}\right)+(1-a)\frac{S}{K}$$

ここで，係数 a は不均衡の状態にあるとき，産出量が企業家と消費者とにいかに配分されるかを決定する制度的な市場取決めを表わしている。財に対する超過需要が存在する場合，$1>a>0$

であり，現実の資本蓄積率は，資本単位当り計画貯蓄と計画投資との1次結合として決定される。それに対して財に対する超過需要がゼロまたは負の場合は $a=0$ となって計画貯蓄が実現されると仮定される。$\pi>0$ のとき $1>a>0$ であり，$\pi\leqq 0$ のとき $a=0$ である。上式に(5)式を代入すると，次式が得られる。

$$(6)\quad \frac{\dot{K}}{K}=\frac{a}{\lambda}\pi+\frac{S}{K}$$

第3の特徴としては，債券市場は常に需給均衡の状態にあるということである。ワルラス法則によれば，労働市場の完全雇用の前提のもとでは，財のフロー超過需要と実質貨幣残高のフロー超過需要と債券のフロー超過需要との合計はゼロでなければならない。ここで，債券市場の均衡を仮定すれば，資本単位当り財のフロー超過需要は資本単位当り実質貨幣残高フロー超過供給に等しいという関係が得られる。スタイン—永谷はこのような関係をつぎのように表わしている。

$$(7)\quad \frac{\pi}{\lambda}=h[\mathrm{V}-L(\cdot)]$$

ここで，(7)式の左辺はすでにみたように財のフロー超過需要を表わし，右辺は実質貨幣残高フロー超過供給を表わしているが，後者についてはつぎのように説明される。V は資本単位当り実質貨幣残高供給であり，$L(\cdot)$ は資本単位当り実質貨幣残高需要（関数）であるので，したがって $V-L(\cdot)$ は資本単位当り実質貨幣残高ストックの超過供給を表わしている。ここで，彼等は実質貨幣残高フローの超過供給はストックの超過供給に比例すると仮定しているので，比例定数を $h(h>0)$ とすれば，資本単位当りの実質貨幣残高フローの超過供給は(7)式の右辺のように示されるのである。したがって，労働および債券両市場の均衡を仮定した場合のワルラス法則は(7)式で表わされる。

ところで，$L(\cdot)$ は資本単位当り実質貨幣残高需要関数を表わしているが，これと実質貨幣需要関数 $M^d/P\equiv L^*$ との関係についてはつぎのように説明される。実質貨幣需要は実質総需要 $(Y+I-S)$，貨幣保有の機会費用である資本の期待収益率 $(r(x)+\pi^*)$ および債券の名目利子率 ρ，民間部門の実質純資産 $(K+A)$ にそれぞれ依存すると仮定され，つぎのように示される。

$$\frac{M^d}{P}\equiv L^*=L^*(Y+I-S,\ r(x)+\pi^*,\ \rho,\ K+A)$$

ここで $L^*(\cdot)$ は $(Y+I-S)$ と $(K+A)$ に関して1次同次関数と仮定すると，資本単位当り実質貨幣需要は

$$(8)\quad \frac{M^d}{PK}\equiv L=L(y(x)+\frac{\pi}{\lambda},\ r(x)+\pi^*,\ \rho,\ \theta V)$$

で示されることになる。ここで $L_1=\partial L/\partial(y(x)+\pi/\lambda)>0$, $L_2=\partial L/\partial(r+\pi^*)<0$, $L_3=\partial L/\partial\rho<0$, $0<L_4\theta=\partial L/\partial\mathrm{V}<1$ と仮定される。なお，L_1 はいわゆる取引残高需要，L_2 は貨幣と実物資本との代替関係，L_3 は貨幣と債券との代替関係，$\mathrm{L}_4\theta$ は貨幣と実質純資産との補完関係を，それぞれ表わしている。

第4に，期待インフレ率の形成については，静学的価格期待が仮定されているということで

ある。スタイン―永谷は価格期待関数について，期待インフレ率 π^* は現実のインフレ率 π の増加関数であるとして，つぎのように表わしている。

(9a) $\pi^*=g(\pi)\ ;\ g'(\pi)>0$

しかしながら，Hadjimichalakis が指摘しているように[4]，このような価格期待関数の導入にもかかわらず，スタインのこれまでの一連の論文〔6〕,〔7〕,〔8〕の主要な分析目的が均斉解とその比較静学分析に向けられたために，期待の役割ことにそれが動学過程に与える影響は分析されていない。つまり，彼にあっては均斉状態において成立する静学的価格期待の場合を主要な考察の対象としているのである。この場合 (9a) 式はつぎのように特定化することができる。すなわち

(9b) $\pi^*=\pi$

である[5]。われわれは今後 (9b) 式で示された静学的価格期待の仮定のもとで分析をすすめていくことにする。

これまで述べてきた4つの特徴点に加えて，最後に x と V の時間的変化を示す動学方程式がつぎのように与えられる。

(10) $\dfrac{\dot{V}}{V}=\mu-\pi-\dfrac{\dot{K}}{K}$

(11) $\dfrac{\dot{x}}{x}=n-\dfrac{\dot{K}}{K}$

ここで，(10)式の μ は外部貨幣の供給量増加率 $\dot{M}/M$ であり，政府によって外生的に与えられる一定のパラメーターである。

以上がスタイン―永谷モデルの概略であるが，そのモデルは，(1)〜(8)および(9b)〜(11)の11個の方程式と，y，x，r，S/K，I/K，$\dot{K}/K$，V，L，ρ，π，π^* の11個の内生変数（未知数）および μ，n，θ の3個の外生変数からなり，完結した体系をなしている。

ところで，(3)式と(4)式を(5)式に代入し，(8)式を(7)式に代入すると，(5)式および(7)式はそれぞれ

(12) $\pi=\lambda[n+r(x)+\pi^*-\rho-S(x,\ \theta V)]$

(13) $\dfrac{\pi}{\lambda h}=V-L[y(x)+\dfrac{\pi}{\lambda},\ r(x)+\pi^*,\ \rho,\ \theta V]$

となる。このようにして，スタイン―永谷モデルは結局つぎの6個の方程式に集約される。

モデル(A)

$$\begin{cases}
(12) & \pi=\lambda[n+r(x)+\pi^*-\rho-S(x,\ \theta V)] \\
(13) & \dfrac{\pi}{\lambda h}=V-L[y(x)+\dfrac{\pi}{\lambda},\ r(x)+\pi^*,\ \rho,\ \theta V] \\
(9b) & \pi^*=\pi \\
(6) & \dfrac{\dot{K}}{K}=\dfrac{a}{\lambda}\pi+\dfrac{S}{K} \\
(10) & \dfrac{\dot{V}}{V}=\mu-\pi-\dfrac{\dot{K}}{K} \\
(11) & \dfrac{\dot{x}}{x}=n-\dfrac{\dot{K}}{K}
\end{cases}$$

われわれはこれをスタイン―永谷の基本モデル(A)とよぼう。

第2節　比較静学分析の問題点とモデルの一般化

(1)　比較静学分析の問題点

われわれが前節で示した基本モデル(A)において，(9b)式を(12)と(13)式に代入し，(6)式を(10)と(11)式に代入すると，基本モデル(A)はつぎのような方程式体系となる。

モデル(A)′

$$\begin{cases} (14) & \pi=\lambda[n+r(x)+\pi-\rho-S(x,\ \theta V)] \\ (15) & \dfrac{\pi}{\lambda h}=V-L[y(x)+\dfrac{\pi}{\lambda},\ r(x)+\pi,\ \rho,\ \theta V] \\ (16) & \dfrac{\dot{V}}{V}=\mu-\left(1+\dfrac{a}{\lambda}\right)\pi-S(x,\ \theta V) \\ (17) & \dfrac{\dot{x}}{x}=n-\dfrac{a}{\lambda}\pi-S(x,\ \theta V) \end{cases}$$

われわれはこれをモデル$(A)'$としよう。スタイン—永谷は以上のモデルに基づいて，モデルの解を数学的に二つの段階によって導出している[6]。まず第1段階では，(14)と(15)式より，π と ρ は，x と V の関数と考えることができるので，この関係はつぎのように表わすことができる。

$$(18)\quad \pi=\pi(x,\ V)$$

$$(19)\quad \rho=\rho(x,\ V)$$

スタインはこれを短期解とよび，つぎに，x あるいは V の変化に対する π と ρ の均衡水準の変化の方向を分析する。第2段階では(16)と(17)式（ただし，この場合(18)式がこれら二つの式に代入される）によって，x と V が変化するときの π，x，V の時間経路と長期解が求められ，つぎに貨幣供給量の増加率 μ の変化に対する x と V の長期解の変化の方向が導出される。

以上のような二つの段階によって均斉解を導出するスタインの数学的な方法は，彼が諸論文で貢献した最も重要な点の一つとされている[7]。しかしながら，Hadjimichalakis が指摘しているように[8]，彼等の第1段階での π と ρ についての比較静学分析については解決すべき問題点が存在する。つぎに，われわれはこの点についてみよう。

彼等の分析において，第1段階の短期解の比較静学とは，x あるいは V の変化に対応して，π と ρ の均衡水準がいかなる方向に変動するかということである。すなわち，短期解である(18)と(19)式において，π と ρ の x および V に関する偏微係数つまり π_x，ρ_x，π_v および ρ_v の符号はどうなるかということである。以下では，彼等にしたがってこれらの偏微係数のうち，π_v についてみてみよう。これはつぎのように求められる。

まず，(14)式を ρ について

$$(14)'\quad \rho=n+r(x)+\pi-S(x,\ \theta V)-\frac{\pi}{\lambda}$$

のように解き，この ρ を(15)式に代入すると，(15)式は

$$(20)\quad \frac{\pi}{\lambda h}=V-L[y(x)+\frac{\pi}{\lambda},\ r(x)+\pi,\ n+r(x)+\pi-S(x,\ \theta V)-\frac{\pi}{\lambda},\ \theta V]$$

となる。(20)式より $\partial\pi/\partial V\equiv\pi_v$ を求めて整理すると

$$\left[\frac{1}{\lambda}\left\{\frac{1}{h}+(L_1-L_3)\right\}+(L_2+L_3)\right]\frac{\partial\pi}{\partial V}=(1-L_4\theta)+L_3S_2\theta$$

が得られる。ここで

$$(21)\quad \left[\frac{1}{\lambda}\left\{\frac{1}{h}+(L_1-L_3)\right\}+(L_2+L_3)\right]\equiv J$$

とおき，$J\neq 0$ ならば，$\partial\pi/\partial V$ は

$$(22)\quad \frac{\partial\pi}{\partial V}=\frac{(1-L_4\theta)+L_3S_2\theta}{J}$$

となる。

ところで，(22)式において，$(1-L_4\theta)>0$，$L_3S_2\theta>0$ であるので分子は正であるが，分母の J は，$1/\lambda\{1/h+(L_1-L_3)\}>0$，$(L_2+L_3)<0$ であるので不明である。したがって，V の変化に対する π の変化の方向は，(20)式の $\pi/\lambda h=V-L(\cdot)$ の偏微分に関する符号だけでは決定しえないのである。

ところが，Hadjimichalakis が指摘しているように[9]，スタインは初期の論文〔6〕において $\partial\pi/\partial V<0$ ということは妥当な結果ではないとして，$\partial\pi/\partial V>0$ と仮定している[10]。このことは，(22)式において，その分子は正であるので，$J>0$ を仮定したことと同一の意味をもつ。

しかし，このような比較静学分析において均衡値の変動方向が決定されない場合に，変動方向を仮定してしまうのは好ましい問題解決の方法ではない。一般化された動学モデルの安定条件によって変動方向を確定できれば，そのほうが好ましいことはいうまでもない。このような解決方法はすでに Hadjimichalakis やスタイン—永谷によって試みられている。すなわち，Hadjimichalakis〔2〕はトービン・モデルを一般化した短期動学モデルに基づいて，また，スタイン—永谷〔9〕は，すでに述べた(16)および(17)式からなる長期動学モデルに基づいて，それぞれ動学的安定条件を求め，これより $\partial\pi/\partial V>0$ という結果を導出している。しかしながら，Hadjimichalakis は生産物市場，債券市場を陽表的に扱っていない。またスタイン—永谷は長期体系の安定性を仮定すれば，π_v の符号が明らかになることを示しているが，しかし，それは実質残高効果が非常に小さいという条件のもとにおいてである。しかも，スタイン—永谷・モデルでは債券市場の均衡状態が一貫して仮定されており，この仮定は一般的なものではない。ここでわれわれは第3の接近方法としてスタイン—永谷・モデルを一般化して債券市場の不均衡状態を許容するような形に修正して，π_v の符号を決定しよう。

本稿では，Hadjimichalakis〔3〕やジョンソン〔4〕によって動学的に定式化された貸付資金説の考え方を利子率の時間的変化を示す動学方程式として導入することによって，スタイン—永谷の動学モデルを構成し，このような動学モデルに基づいてスタイン—永谷・モデルの動学的安定条件を明らかにしたい。そしてこの条件を用いて $J>0$ すなわち $\partial\pi/\partial V\equiv\pi_v>0$ であることを明らかにしよう。そのために，まずわれわれはスタイン—永谷・モデルを一般化することからはじめよう。

(2) スタイン—永谷・モデルの一般化

すでにみたように，スタイン・モデルおよびスタイン―永谷・モデルにおいては，スタインの主たる関心が均斉解とその比較静学分析に向けられたため，期待インフレ率や利子率の時間的な動きについては説明されていない。そこでこれらの時間的な動きをみるためにそれぞれつぎのような動学方程式を導入する。

まず期待インフレ率 π^* の時間的変化については，シドラウスキー〔5〕, Hadjimichalakis〔2〕などによって，貨幣的成長モデルに導入されたいわゆる適応期待仮説（adaptive expectation hypothesis）を採用する。この仮説は期待インフレ率が現実のインフレ率と期待インフレ率との差の一定割合で変化するという考え方に基づき，つぎのように表わされる。

(23) $\dot{\pi}^* = \gamma[\pi - \pi^*]$

ここで，γ はいわゆる期待係数であり，正の調整速度である。この場合，スタイン―永谷・モデルにおける $\pi^* = \pi$ という静学的価格期待（あるいは完全予見）の仮定は，この仮説に即して解釈するならば，$\gamma \to \infty$ という特別のケースと考えられる。

つぎに利子率の時間的変化については， Hadjimichalakis やジョンソンによって動学的に定式化された貸付資金説（dynamic loanable funds theory）を採用しよう[11]。いま，債券の超過需要を ED_B とすると，ワルラス法則より債券，貨幣および財の超過需要の合計は恒等的にゼロとなるので

$$-ED_B = \frac{\pi}{\lambda} - h[V - L\{y(x) + \frac{\pi}{\lambda},\ r(x) + \pi^*,\ \rho,\ \theta V\}]$$

である。ここで貸付資金説の考え方により，利子率は債券の超過需要（または超過供給）にしたがって変動するとすれば，利子率の動きは次式で表わされる。

(24) $\dot{\rho} = \beta[-ED_B] = \beta[\frac{\pi}{\lambda} - h\{V - L(y(x) + \frac{\pi}{\lambda},\ r(x) + \pi^*,\ \rho,\ \theta V)\}]$

ただし β は債券市場における正の調整速度である。スタイン―永谷・モデルにおいて，(13)式で示された関係はこれを上の方程式に照らして解釈するならば，$\beta \to \infty$ という特別の場合であると考えられる。

以上スタイン―永谷・モデルを一般化した動学モデルはつぎの 6 個の方程式から構成される。

モデル(B)

$$\begin{cases} (12) & \pi = \lambda[n + r(x) + \pi^* - \rho - S(x,\ \theta V)] \\ (23) & \dot{\pi}^* = \gamma[\pi - \pi^*] \\ (24) & \dot{\rho} = \beta[\frac{\pi}{\lambda} - h\{V - L(y(x) + \frac{\pi}{\lambda}, r(x) + \pi^*,\ \rho,\ \theta V)\}] \\ (6) & \frac{\dot{K}}{K} = \frac{a}{\lambda}\pi + \frac{S}{K} \\ (10) & \frac{\dot{V}}{V} = \mu - \pi - \frac{\dot{K}}{K} \\ (11) & \frac{\dot{x}}{x} = n - \frac{\dot{K}}{K} \end{cases}$$

われわれはこの動学モデルをモデル(B)としよう。モデル(B)はすでに見たスタイン―永谷の基

本モデル(A)の一般化であり，モデル(A)はモデル(B)において $\gamma\to\infty$，$\beta\to\infty$ としたときにえられる特別の場合である。

第3節　短期モデルの動学分析

つぎにわれわれは前節で示した動学モデル(B)より短期動学モデルを構成し，これより安定条件を導出しよう。

ところで，スタインはすでに述べた諸論文や著書において短期を x が一定という意味で使用してはいるが，このことは資本ストック K や労動力 N が一定（したがって $\bar{x}=\bar{N}/\bar{K}=$一定）であるような期間という通常の意味で使用されているのではない。すなわち彼の短期とは $\dot{x}/x=0$ つまり $n=\dot{K}/K$ であるような状態（または期間）と定義されているのである[12]。

ここで，モデル(B)において，以上の彼の短期の定義からえられる $n=\dot{K}/K$ という関係式（したがって，また現実の資本蓄積率をあらわす(6)式は n の値に特定化される）を(10)式に代入し，また $x=\bar{x}$ を(12)，(24)式に代入すると，つぎのような短期動学モデル(C)がえられる。

モデル(C)

$$\left\{\begin{array}{ll}(25) & \pi=\lambda[n+r(\bar{x})+\pi^*-\rho-S(\bar{x},\ \theta V)] \\ (26) & \dfrac{\dot{V}}{V}=\mu-\pi-n \\ (23) & \dot{\pi}^*=\gamma[\pi-\pi^*] \\ (27) & \dot{\rho}=\beta[\dfrac{\pi}{\lambda}-h\{V-L(y(\bar{x})+\dfrac{\pi}{\lambda},\ r(\bar{x})+\pi^*,\rho,\theta V)\}]\end{array}\right.$$

つぎにわれわれは以上の短期動学モデル(C)の安定条件を考察しよう。まず(25)式を(26)，(23)，(27)式に代入すると，V，π^* および ρ の動学的経路はつぎの3つの動学方程式によって表わされる。

$$(28)\quad \frac{\dot{V}}{V}=\mu-\lambda[n+r(\bar{x})+\pi^*-\rho-S(\bar{x},\ \theta V)]-n$$

$$(29)\quad \dot{\pi}^*=\gamma[\lambda\{n+r(\bar{x})+\pi^*-\rho-S(\bar{x},\ \theta V)\}-\pi^*]$$

$$(30)\quad \dot{\rho}=\beta[\{n+r(\bar{x})+\pi^*-\rho-S(\bar{x},\ \theta V)\}-h\{V-L(\bar{y}+n+r(\bar{x})+\pi^*-\rho-S(\bar{x},\ \theta V),\ r(\bar{x})+\pi^*,\ \rho,\ \theta V)\}]$$

ここで $\dot{V}=0$，$\dot{\pi}^*=0$ および $\dot{\rho}=0$ を短期均衡点と定義すれば，$\dot{V}=0$，$V\neq0$ および $\dot{\pi}^*=0$ より

$$(31)\quad \mu-n=\pi^*=\pi=\lambda[n+r(\bar{x})+\pi^*-\rho-S(\bar{x},\ \theta V)]$$

が成り立つ。また $\dot{\rho}=0$ より

$$(32)\quad \frac{\pi}{\lambda}=h[V-L\{y(\bar{x})+\frac{\pi}{\lambda},\ r(\bar{x})+\pi^*,\ \rho,\ \theta V\}]$$

の関係がえられる。これらの関係式はスタイン―永谷・モデル(A)において(12)，(13)，(9b)式および(11)，(10)式において $n=\dot{K}/K$ と $\dot{V}=0$ とした場合の関係式から構成された彼等の短期モデルを意味している。そして上の二つの式の関係で定められる均衡点では π，π^*，ρ および V はすべて一定となる。つまりこのような均衡点（V_0，π_0^*，ρ_0）では，現実のインフレ率 π は期待インフレ率 π^* に等しく，$\mu-n$ という一定の率で変化し，したがってまた資本単位当り実質貨幣

残高 V は一定となる。また債券の超過需要（または超過供給）はゼロとなり，名目利子率 ρ は一定となる。

つぎに，われわれは以上の均衡点が存在すると仮定して，モデルの小域的安定性（local stability）について検討しよう。まず(28)，(29)，(30)式を均衡値の近傍でテーラー展開して線型近似すると

(33) $\dot{V}=\lambda V_0S_2\theta(V-V_0)-\lambda V_0(\pi^*-\pi_0^*)+\lambda V_0(\rho-\rho_0)$

(34) $\dot{\pi}^*=-\gamma\lambda S_2\theta(V-V_0)+\gamma(\lambda-1)(\pi^*-\pi_0^*)-\gamma\lambda(\rho-\rho_0)$

(35) $\dot{\rho}=-\beta[S_2\theta+h\{(1-L_4\theta)+L_1S_2\theta\}](V-V_0)$
$+\beta[1+h(L_1+L_2)](\pi^*-\pi_0^*)-\beta[1+h(L_1-L_3)](\rho-\rho_0)$

となる。ここでサブスクリプトの 0 がついた変数は均衡値を意味する。したがって固有方程式は

$$\Delta(\delta)=\begin{vmatrix} \lambda V_0S_2\theta-\delta & -\lambda V_0 & \lambda V_0 \\ -\gamma\lambda S_2\theta & \gamma(\lambda-1)-\delta & -\gamma\lambda \\ -\beta[S_2\theta+h\{(1-L_4\theta)+L_1S_2\theta\}] & \beta[1+h(L_1+L_2)] & -\beta[1+h(L_1-L_3)]-\delta \end{vmatrix}=0$$

となる。$\Delta(\delta)=-\delta^3-a_1\delta^2-a_2\delta-a_3$ とおけば

$a_1=A_1\gamma+B_1\beta+D_1$

$a_2=A_2\gamma+B_2\beta+C_2\gamma\beta$

$a_3=C_3\gamma\beta$

である。ただし

$A_1=(1-\lambda)$，$B_1=\{1+h(L_1-L_3)\}>0$，

$D_1=-\lambda V_0S_2\theta>0$，$A_2=-\lambda V_0S_2\theta>0$，

$B_2=\lambda hV_0[L_3S_2\theta+(1-L_4\theta)]>0$，

$C_2=[1+h(L_1-L_3)+\lambda h(L_2+L_3)]$，

$C_3=\lambda hV_0[L_3S_2\theta+(1-L_4\theta)]>0$

である。体系が安定であるためには，固有方程式 $\Delta(\delta)=0$ の根の実数部分がすべて負にならなければならないが，そのための必要かつ十分条件はルース・フルヴィツ（Routh-Hurwitz）の定理[13)]によって

(イ) $a_1>0$

(ロ) $a_1a_2-a_3>0$

(ハ) $a_3>0$

である。ここで(ロ)の条件について考えよう。これを書き直すと

(36) $A\gamma^2+B\gamma^2\beta+C\gamma+D\gamma\beta+E\gamma\beta^2+F\beta^2+G\beta>0$

となる。ここで，$A=A_1A_2$，$B=A_1C_2$，$C=D_1A_2>0$，$D=A_1B_2+B_1A_2+D_1C_2-C_3$，$E=B_1C_2$，$F=B_1B_2>0$，$G=D_1B_2>0$ である。

いま，(36)式の両辺を β^2 で割って β について極限をとると

$$(37)\quad \lim_{\beta\to\infty}\left[(Er+F)+\frac{(Br^2+Dr+G)}{\beta}+\frac{(Ar^2+Cr)}{\beta}\right]=Er+F\geqq 0$$

となる。さらに，ここで任意の $r>0$ に対して(37)式が成立するためには

$$(38)\quad E=[1+h(L_1-L_3)][1+h(L_1-L_3)+\lambda h(L_2+L_3)]$$

$$=[1+h(L_1-L_3)]\lambda h\left[\frac{1}{\lambda}\left\{\frac{1}{h}+(L_1-L_3)\right\}+(L_2+L_3)\right]\geqq 0$$

という条件が満たされなければならない。ところが(38)式において $[1+h(L_1-L_3)]>0$，$\lambda h>0$ であるので，(38)式が成立するためには

$$\frac{1}{\lambda}\left\{\frac{1}{h}+(L_1-L_3)\right\}+(\mathrm{L}_2+L_3)\geqq 0$$

でなければならない。ところが，これは(21)式より明らかなようにＪの値を示しているので，(38)式の成立は J≧0 を意味することになる。すなわち，モデル(C)が安定的であるならば，任意の $r>0$ と $\beta\to\infty$ のもとで $J\geqq 0$ ということがいえるのである。したがって $J=0$ の場合を除けば，$\pi_v>0$ ということが確定できるのである[14)]。

ところが，スタイン—永谷・モデルは静学的価格期待と債券市場がつねに均衡していることを前提としており，この前提はモデル(C)において，(23)および(27)式の r と β とがそれぞれ無限大になる場合に対応している。したがって，スタイン—永谷・モデルが安定的であるならば，この場合も $J\geqq 0$ でなければならず，そのため $J=0$ の場合を除けば $\pi_v>0$ ということが確定できるのである。

む　す　び

本稿においては，債券市場の不均衡状態を陽表的に考慮することによってスタイン—永谷・モデルを一般化し，このようなモデルに基づいて，彼等のモデルの比較静学分析の問題点を検討した。

われわれは一般化された短期動学モデルに基づいて，スタイン—永谷・モデルの動学的安定条件をルース・フルヴィツの判定条件によって導出した。その結果，スタイン—永谷の短期モデルにおいて不明であった比較静学分析結果を明確にすることができた。

なお本稿では，彼等の長期解の比較静学分析については検討しなかった。これまでわれわれが考察してえた短期の動学的安定条件は長期解の比較静学に対してもまた重要な意味をもつことが指摘されているが，この点の検討については今後に残された問題である。

謝　　辞

本稿の執筆に際して，同志社大学経済学部の岩根達雄，今村宏両教授および中村一美助教授から多くの貴重なコメントをいただいた。また第３節の安定条件の導出に関する数学的手法については，川崎医科大学数学教室の中村忠氏から多くの貴重なコメントと助言をいただいた。ここに謝意をあらわしたい。

注

1) J.L. Stein and K. Nagatani, 〔9〕, pp. 167—170.
われわれは本節において基本的にはスタイン—永谷の貨幣的成長モデルを要約しているが，まとめる過程においてスタインが一連の論文〔6〕,〔7〕,〔8〕や著書〔10〕において展開した貨幣的成長モデルをも参考にした。なお，スタインおよびスタイン—永谷・モデルの紹介については藤野(〔14〕, 12—15ページ）によってもおこなわれている。

2) この点については S. Fisher,〔1〕, pp. 884—885 および Hadjimichalakis,〔2〕, pp. 458—469に負うところが大きい。

3) 民間部門の公共部門に対する実質純債権Aは通貨，金および民間部門で保有された政府債券から政府によって保有された民間債券を差し引いたものと定義されている。J.L. Stein and K. Nagatani,〔9〕, p. 167.

4) M.G. Hadjimichalakis,〔2〕, pp. 462—463.

5) M.G. Hadjimichalakis,〔2〕, pp. 468—469.

6) J.L. Stein,〔6〕, pp. 455—456.

7) M.G. Hadjimichalakis,〔2〕, p. 462.

8) M.G. Hadjimichalakis,〔2〕, p. 458, p. 462, および pp. 467—469.

9) M.G. Hadjimichalakis,〔2〕, p. 468.

10) 同様の仮定は，D.P. Villanueva (〔13〕, pp. 754—755) においてもなされている。

11) M.G. Hadjimichalakis,〔3〕, pp. 561—562. L. Johnson,〔4〕, p. 475.

12) J.L. Stein〔6〕, pp. 455—456,〔10〕, pp. 87—88.

13) 安井琢磨，〔15〕，140—147ページ，参照。

14) すでに述べたように修正したモデル(C)において，短期均衡点では(31)および(32)式が成立するが，ここで(31)式を(32)式に代入し，(32)式を V と π のタームで ρ について解くと，V と π の関数として示された ρ の均衡値が得られる。これと(31)式で示された $\pi^*=\pi$ という関係式とをモデル(C)の(25)式に代入して $\frac{\partial \pi}{\partial V}$ を求めると，(22)式で示されたそれとまったく同一の結果が得られる。したがって，修正したモデル(C)においても，J についてはスタイン—永谷・モデル(A)′のそれとまったく同一であることが確かめられるのである。

参 考 文 献

1) Fischer, S. "Keynes-Wicksell and Neoclassical Models of Money and Growth", *American Economic Review* (December 1972), pp. 880—890.

2) Hadjimichalakis, M.G. "Equilibrium and Disequilibrium Growth with Money: The Tobin Models", *Review of Economic Studies* (October 1971), pp. 457—479

3) Hadjimichalakis, M.G. "On the Effectiveness of Monetary Policy as a Stabilization Device", *Review of Economic Studies* (October 1973), pp. 561—570.

4) Johnson, L. "Portfolio Adjustment and Monetary Growth", *Review of Economic Studies* (October 1976), pp. 475—481.

5) Sidrauski, M. "Inflation and Economic Growth", *Journal of Political Economy* (December 1967), pp.796—810.

6) Stein, J.L. "Money and Capacity Growth", *Journal of Political Economy* (October 1966), pp. 451—465.

7) Stein, J.L. "Rational Choice and the Patterns of Growth in a Monetary Economy: Comment", *American Economic Reviw* (September 1968), pp. 944—950.

8) Stein, J. L. "Neoclassical and Keynes-Wicksell Monetary Growth Models", *Journal*

of Money, Credit and Banking (May 1969), pp. 153—171.

9) Stein, J.L. and Nagatani, K. "Stabilization Policies in a Growing Economy", *Review of Economic Studies* (April 1969), pp. 165—183.

10) Stein, J.L. *Money and Capacity Growth* (Columbia University Press, 1971).

11) Tobin, J. "Money and Economic Growth", *Econometrica* (October 1965), pp. 671—684.

12) Tobin, J. "The Neutrality of Money in Growth Models: A Comment", *Economica* (February 1967). pp. 69—72.

13) Villanueva, D.P. "A Neoclassical Monetary Growth Model with Independent Savings and Investment Functions," *Journal of Money, Credit, and Banking* (November 1971), pp.750—759.

14) 藤野正三郎「貨幣的成長理論の展望」『季刊理論経済学』(理論・計量経済学機関誌) 第XXI巻第2号, 1970年8月, pp. 1—20.

15) 熊谷尚夫, 大石泰彦, 渡辺太郎, 芳賀半次郎編『安井琢磨著作集—第III巻経済動学の諸問題』創文社1971年。